

# UNE PROCEDURE NUMERIQUE ALTERNATIVE POUR LES CALCULS DE C-PHI REDUCTION DANS CESAR-LCPC

## AN ALTERNATIVE NUMERICAL PROCEDURE FOR C-PHI REDUCTION ANALYSES WITH CESAR-LCPC

Emmanuel BOURGEOIS<sup>1</sup>, David REMAUD<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Université Gustave Eiffel, Marne-la-Vallée, France

<sup>2</sup> Itech, Saint-Maurice, France

**RÉSUMÉ** - Le calcul du facteur de sécurité par c-phi réduction ou celui de la charge limite d'un ouvrage fait partie des applications courantes des éléments finis en géotechnique. On explique dans cette communication comment ce type de calculs est fait dans le logiciel CESAR, et on présente les caractéristiques et les performances d'une nouvelle approche qui réduit sensiblement les temps de calcul.

**ABSTRACT** – Computations of limit loads or c-phi reduction analysis are common applications of the finite element method in geotechnical engineering. This communication explains how this type of computations is implemented in the solver CESAR, and presents a new approach that reduces computation times.

Mots clés : –méthode des éléments finis, analyse de stabilité, c-phi réduction

### 1. Introduction

La méthode des éléments finis présente une grande polyvalence, et permet de traiter des problèmes variés, à condition de développer des procédures spécifiques à certaines problématiques. Le calcul de charges limites ou de facteurs de sécurité des ouvrages géotechniques est un exemple d'application pour laquelle différentes approches peuvent être employées. Ce sont des problèmes fortement non linéaires et difficiles sur le plan numérique, ce qui rend la validation des approches numériques particulièrement importante. Malheureusement, les solutions de référence permettant de valider les résultats sont rares et limitées à des cas simples (Remaud *et al.*, 2022).

Dans la plupart des codes de calcul dédiés à la géotechnique, le calcul de facteurs de sécurité repose sur une succession de calculs élasto-plastiques «en déplacement» (Plaxis, 2023, Zsoil, 2022, CESAR-LCPC, 2022, Diana, 2020, Midas, 2021, Itasca, 2023), mais d'autres approches reposent sur la résolution de problèmes d'analyse limite par optimisation sous contrainte en utilisant des techniques de programmation conique (Krabbenhoft *et al.*, 2016, Krabbenhoft, 2023) ou d'autres techniques (Midas, 2021). Dans la suite, on s'intéresse à l'approche la plus classique, qui consiste à résoudre une succession de problèmes élastoplastiques. Parmi les techniques utilisant cette approche, on peut distinguer deux familles : la plus simple, illustrée par la figure 1 est celle introduite

dans CESAR (Bourgeois, 2006). Le principe est de réduire les valeurs de  $c$  et  $\tan \varphi$  et d'effectuer un calcul élastoplastique avec ces caractéristiques réduites. Si le critère de résistance, avec les valeurs réduites, n'est pas vérifié par l'état de contraintes initial, on corrige les contraintes et on calcule des forces nodales associées, qui entraînent des déformations et des déplacements dans le maillage. Selon que le calcul converge ou non, on réinitialise les contraintes et on refait un calcul avec un facteur de réduction plus grand ou plus petit : il y a donc deux processus itératifs emboîtés, l'un pour la recherche de la valeur optimale du coefficient de réduction (processus externe), et l'autre pour le calcul élastoplastique (processus interne). Dans le processus interne, les caractéristiques de résistance restent constantes ; le déplacement obtenu est la solution d'un problème de mécanique classique, avec un chargement spécifique lié à la réduction de la résistance. La deuxième famille de procédures numériques utilise un seul processus itératif pour gérer la mise à jour des caractéristiques de résistance et le calcul des déformations plastiques. Avec cette approche plus complexe, comme les caractéristiques de résistance varient d'une itération à la suivante, l'interprétation du déplacement calculé n'est pas claire.

Pour la première famille de calculs, avec deux processus emboîtés, le résultat dépend des critères qui permettent de décider que le processus interne converge ou non, et de l'algorithme de résolution utilisé ; or les algorithmes existants -et leurs implémentations- sont nombreux (méthode de rigidité tangente, méthode des « contraintes initiales », méthodes utilisant des accélérateurs de convergence, méthode de contrôle de longueur d'arc, etc.). Cette variété des traitements numériques explique pourquoi les résultats obtenus peuvent dépendre (parfois beaucoup) des réglages retenus pour les algorithmes utilisés, et aussi des hypothèses de modélisation au sens large (notamment, mais pas seulement, la taille des éléments dans le maillage). Globalement, les différents logiciels donnent souvent des facteurs de sécurité assez proches, mais dans certains cas, l'écart entre les facteurs de sécurité obtenus avec différents logiciels (ou par différents utilisateurs avec le même logiciel) est important ; et pour des facteurs de sécurité voisins, la visualisation des mécanismes de rupture calculés peut être très différente.

## **2. Procédure classique de recherche du facteur de sécurité**

Dans CESAR (cf. figure 1), le facteur de sécurité  $F$  est recherché dans un intervalle  $[F_{\min}, F_{\max}]$  spécifié par l'utilisateur, avec une précision donnée  $\varepsilon$ . Le processus externe est simplement une dichotomie. Le processus interne repose sur quatre éléments :

1- le moteur du calcul est le vecteur de forces nodales calculées en corrigeant les contraintes à partir d'un état de référence. On utilise toujours le même état de référence ; l'utilisation d'un autre champ de contraintes qui serait « plus proche » de la rupture est une piste possible d'optimisation, mais on ne l'a pas approfondie jusqu'ici ;

2- la convergence du processus repose sur l'évaluation de trois indicateurs, calculés avec la différence entre deux estimations successives du déplacement et entre deux estimations successives du « résidu » (le vecteur de forces nodales exprimant le déséquilibre mécanique du système) ; la convergence est atteinte si ces indicateurs

deviennent inférieurs à une tolérance donnée TOL (différente de la précision  $\varepsilon$  sur le facteur de sécurité) au bout d'un nombre d'itérations maximal NITERMAX, les deux paramètres TOL et NITERMAX étant fixés par l'utilisateur ;

3- le calcul élastoplastique utilise la méthode dite « des contraintes initiales » : la matrice de rigidité est la même pour toutes les itérations. Avec ce choix, le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la convergence des calculs avec une tolérance donnée peut être très grand si l'on approche de la valeur optimale du facteur de réduction des résistances ; d'autre part, la tolérance TOL doit être suffisamment petite, faute de quoi on peut obtenir des résultats trop optimistes ;

4- une procédure heuristique, fondée sur la vitesse de variation des indicateurs au cours des itérations plastiques, détecte de manière précoce les situations où le processus va conduire à la convergence ou à la non-convergence.

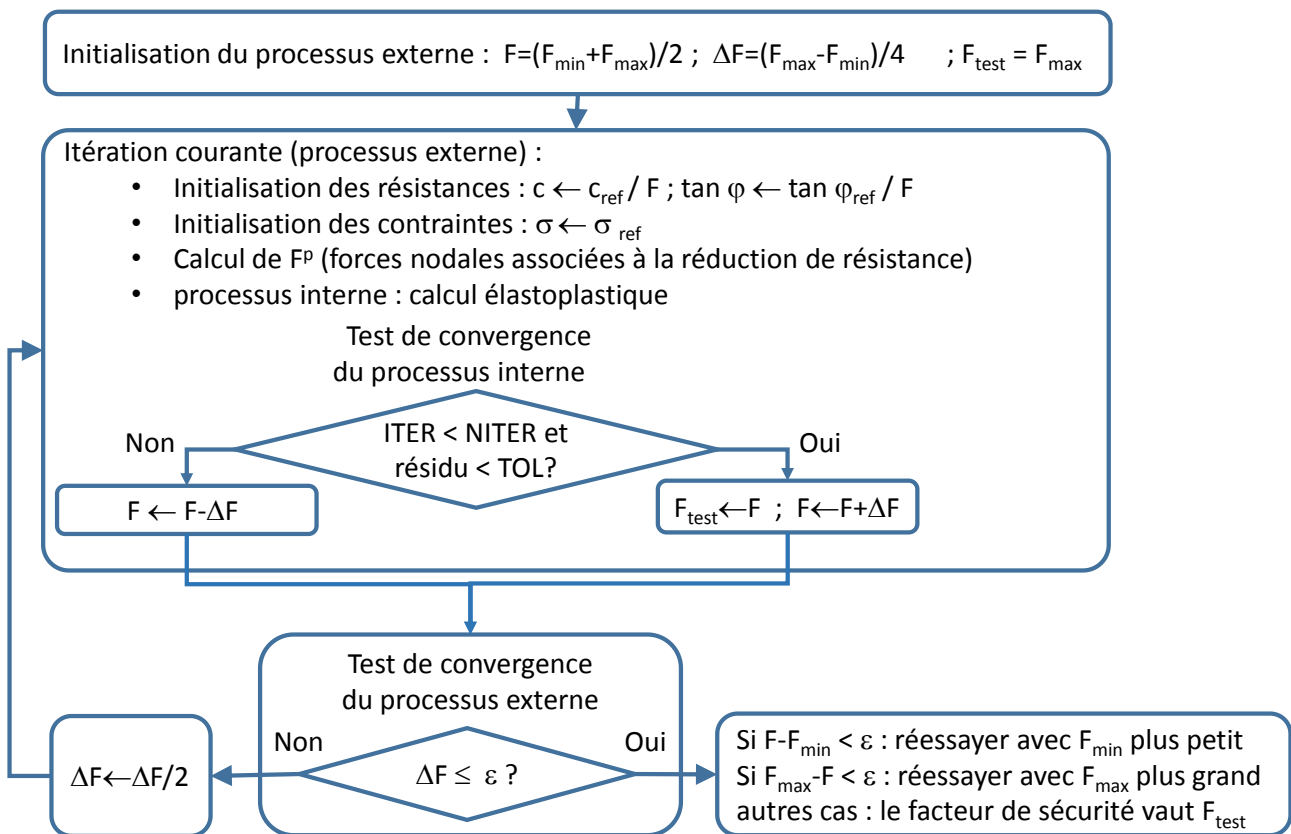


Figure 1 – Illustration d'une procédure de c-phi réduction simple pour la recherche du facteur de sécurité dans l'intervalle  $[F_{\min}, F_{\max}]$  avec une précision  $\varepsilon$

Enfin, dans CESAR, on peut spécifier que les caractéristiques de résistance de certains groupes d'éléments n'ont pas à être réduites dans le processus ; cela permet de prendre en compte certaines situations particulières, en particulier le fait que la réduction de  $c$  et  $\tan \varphi$  dans tout le massif de sol produit une augmentation très forte de la poussée alors que la butée est peu diminuée (Magnan et Meyer, 2018).

### 3. Procédure alternative proposée

On présente ici une procédure numérique identique à la précédente à une différence près : au lieu d'utiliser la méthode des contraintes initiales pour le processus interne, on utilise les techniques d'accélération de résolution de problèmes non linéaires (Crisfield, 1991) disponibles dans CESAR depuis de nombreuses années (Mestat, 1993). Ces techniques sont peu employées à cause d'un relatif manque de précision sur les déplacements calculés pour des situations proches de la rupture. Le point de vue adopté ici est que ce manque de précision n'est pas pénalisant pour des calculs de stabilité, pour lesquels la valeur absolue des déplacements calculés n'est pas significative.

Le principe de l'accélération de la convergence est décrit dans Mestat (1993) et consiste à estimer, à la fin d'une itération  $i+1$ , un champ de déplacement plus proche de la solution que le champ obtenu par l'inversion du système par la méthode des contraintes initiales. Connaissant les incréments de déplacement  $\Delta u(i)$ ,  $\Delta u(i-1)$  et  $\Delta u(i-2)$  aux itérations  $i$ ,  $i-1$  et  $i-2$ , l'incrément de déplacement à l'itération  $i+1$  est calculé comme une combinaison linéaire de  $\Delta u(i)$ ,  $\Delta u(i-1)$  et  $\Delta u(i-2)$ , avec des coefficients qui dépendent des valeurs successives du résidu (voir Crisfield, 1991, ou Mestat, 1993 pour plus de détails). Dans CESAR, on dispose en particulier de trois méthodes d'accélération de convergence, appelées « méthode line search (IMET=11) », « méthode sécante (IMET=12) » et « méthode Davidon – Fletcher – Powell ou D-F-P (IMET =13) ».

### 4. Evaluation des méthodes d'accélération

On considère une couche de sol d'épaisseur 5 m, et on modélise l'action d'une fondation superficielle par une pression uniforme appliquée à la surface du massif sur une largeur égale à  $2B$  avec  $B = 1$  m. On ne maille que la moitié du problème, le modèle a une largeur totale de 10 m. On attribue à la couche de sol un comportement élastique linéaire parfaitement plastique, avec un critère de Tresca, avec les valeurs numériques suivantes :

$$\gamma = 16 \text{ kN/m}^3 ; E = 50 \text{ MPa} ; \nu = 0,2 ; c = 100 \text{ kPa.}$$

La pression limite théorique est égale à  $(\pi+2)c$ , soit 514 kPa. On discrétise le domaine en éléments triangulaires à 6 nœuds de taille uniforme, la longueur des éléments étant fixée à 20 cm ; le maillage comporte 6700 nœuds et 3260 éléments. On adopte les conditions aux limites classiques : deux composantes du déplacement bloquées sur la base du maillage, déplacement horizontal bloqué sur les limites gauche et droite du maillage.

On calcule le tassement maximal sous l'effet d'une pression uniforme égale à 510 kPa, soit environ 99% de la pression limite théorique, appliquée en un seul incrément. On demande une tolérance égale à 0,1%, ce qui est une valeur standard pour ce genre de calcul avec CESAR, et on compare le tassement maximal donné par les différentes méthodes d'accélération proposée par le solveur, ainsi que les temps de calcul. Les résultats sont récapitulés dans le tableau I (les calculs sont faits avec la même machine, un ordinateur portable DELL équipé d'un processeur Intel i5-8365U à 1.6 GHz).

Tableau 1. Comparaison des différentes méthodes de résolution élastoplastiques

|   | Contraintes initiales<br>IMET=1 | Méthode line-search<br>IMET=11 | Méthode sécante<br>IMET=12 | Méthode D-F-P<br>IMET=13 |
|---|---------------------------------|--------------------------------|----------------------------|--------------------------|
| Tassement maxi (mm)                     | 100,7                           | 101,2 (+0,5%)                  | 106,5 (+6%)                | 113 (+11%)               |
| Temps de calcul (s)                     | 14,3                            | 5,0                            | 2,3                        | 1,4                      |
| Facteur de réduction du temps de calcul | 1                               | 2,9                            | 6,2                        | 10,2                     |

Les méthodes IMET=11 et 12 donnent le tassement maximal avec une bonne approximation, mais l'erreur relative devient conséquente (11%) avec la méthode IMET=13. Inversement, le gain de temps procuré par la méthode IMET=11 est relativement modeste. Dans la suite, on propose donc d'utiliser la méthode sécante IMET=12 dans le contexte de calculs de stabilité ou de charge limite.

## 5. Application aux calculs de facteurs de sécurité

On présente quelques exemples d'application de la méthode sécante pour les calculs de c-phi réduction. La comparaison des résultats obtenus avec la méthode de référence montre une bonne cohérence entre les deux approches, avec des temps de calculs réduits lorsqu'on utilise la méthode sécante. D'autre part, la nouvelle procédure présente l'avantage de fournir des résultats qui dépendent moins de la finesse du maillage, ce qui simplifie l'analyse et l'exploitation des résultats.

### 5.1 Fondation superficielle

On reprend le problème précédent, en imposant un état de contraintes initial géostatique (avec  $K_0=1$ ) ; on effectue un calcul de c-phi réduction, avec IMET=1 et IMET=12. Le facteur de sécurité sur les caractéristiques de résistance est égal à  $(\pi+2) \approx 5,14$ . Le facteur de sécurité est cherché dans l'intervalle  $[0,10]$ , avec une précision de 0,01.

#### ***Influence des paramètres de convergence du processus interne***

Le tableau 2 présente les résultats obtenus (avec le même maillage que précédemment) pour différents choix du nombre maximal d'itérations NITER et de la tolérance TOL.

Tableau 2. Résultats obtenus pour différents paramètres du processus interne

| NITER/TOL   | Contraintes initiales IMET=1 |                     | Méthode sécante IMET=12 |                     |
|-------------|------------------------------|---------------------|-------------------------|---------------------|
|             | Facteur de sécurité          | Temps de calcul (s) | Facteur de sécurité     | Temps de calcul (s) |
| 200 / 0,01  | 5,12                         | 61                  | 5,19                    | 50                  |
| 200 / 0,001 | 4,42                         | 58                  | 5,18                    | 59                  |
| 500 / 0,01  | 5,28                         | 102                 | 5,19                    | 47                  |
| 500 / 0,001 | 5,10                         | 155                 | 5,18                    | 60                  |

Avec la méthode sécante IMET=12, le facteur de sécurité obtenu est pratiquement le même quel que soit le choix du couple {nombre maximal d'itérations de plasticité / tolérance sur le résidu} et la différence avec la valeur exacte est inférieure à 1% dans tous les cas. Avec la méthode des contraintes initiales IMET=1, le facteur de sécurité peut être assez éloigné de la valeur exacte si la tolérance est trop petite par rapport au nombre maximal d'itérations autorisé (facteur de sécurité sous-estimé de 14% pour 200 itérations et une tolérance de 0,001), ou trop grande pour un nombre d'itérations important (facteur de sécurité surestimé de 2,7% pour 500 itérations et une tolérance de 0,01). En pratique, les valeurs par défaut dans le logiciel (500 itérations et une tolérance de 0,001) donnent un bon résultat (erreur inférieure à 1%), mais le calcul dure 2,5 fois plus longtemps qu'avec IMET=12.

### **Influence de la taille des éléments**

Le tableau 3 compare les résultats obtenus avec des maillages dont les éléments ont une taille de 10, 20 ou 30 cm, avec les deux méthodes, pour 500 itérations et une tolérance de 0,001.

Tableau 3. Influence de la taille des éléments

|       | Contraintes initiales IMET=1 |                     | Méthode sécante IMET=12 |                     |
|-------|------------------------------|---------------------|-------------------------|---------------------|
|       | Facteur de sécurité          | Temps de calcul (s) | Facteur de sécurité     | Temps de calcul (s) |
| 10 cm | 4,95                         | 179                 | 5,16                    | 66                  |
| 20 cm | 5,10                         | 155                 | 5,18                    | 60                  |
| 30 cm | 5,19                         | 66                  | 5,21                    | 23                  |

La différence relative entre les valeurs extrêmes obtenues avec IMET=12 est inférieure à 1% ; elle est proche de 5% pour IMET=1. Le résultat obtenu avec IMET=12 dépend donc moins de la taille des éléments, ce qui est favorable d'un point de vue pratique. Ces résultats confirment également que l'utilisation de la méthode sécante IMET=12 réduit les temps de calcul d'un facteur 2,5 (voire un peu plus).

### **5.2 Stabilité de pente**

Tschuchnigg *et al.* (2015) ont montré que le calcul du facteur de sécurité d'une pente peut présenter des difficultés pour de forts angles de frottement et une loi non associée : le facteur de sécurité numérique dépend alors beaucoup de la taille des éléments dans le maillage, pour des tailles d'éléments variables mais raisonnables. Ils considèrent le problème dont la géométrie est récapitulée sur la figure 2, avec un poids volumique de 20 kN/m<sup>3</sup>, une cohésion égale à 6 kPa, un angle de frottement  $\varphi$  de 45° et un angle de dilatance  $\psi$  nul. Ils notent que ce problème est difficile sur le plan numérique, et observent aussi pour certains choix des paramètres du logiciel qu'ils utilisent, des mécanismes de rupture inattendus, qui ne débouchent pas au pied du talus. Krabbenhoft (2023) indique qu'une explication possible tient au fait que le problème n'est pas forcément bien défini.

On compare ici les résultats obtenus avec la méthode des contraintes initiales, avec NITER=500 et TOL=0,001, et avec la méthode sécante avec NITER=200 et TOL=0,01, pour trois maillages, dans lesquels la taille des éléments vaut 25 cm, 50 cm et 1 m. Le module de Young est constant et égal à 150 MPa ; le coefficient de Poisson est égal à 0,3. Les valeurs du facteur de sécurité calculées pour différentes tailles d'éléments sont plus proches avec la méthode sécante (figure 3). On note aussi que le mécanisme de rupture est plus conforme à ce qu'on attend dans le calcul avec IMET=12.

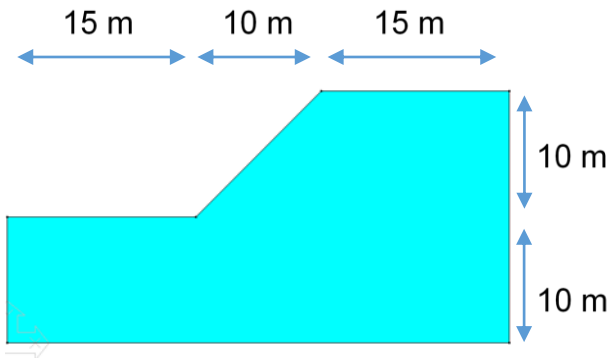


Figure 2 – Géométrie de la pente étudiée

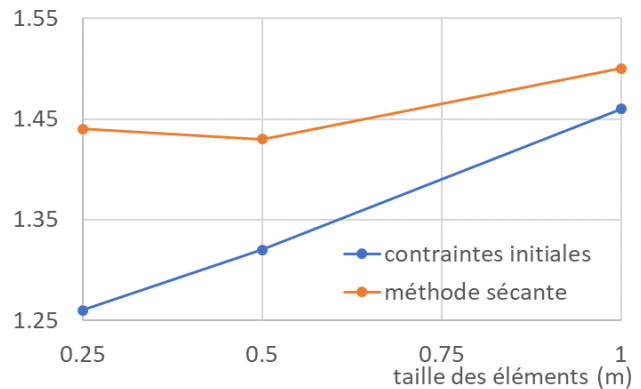


Figure 3 – Evolution du facteur de sécurité avec la taille des éléments

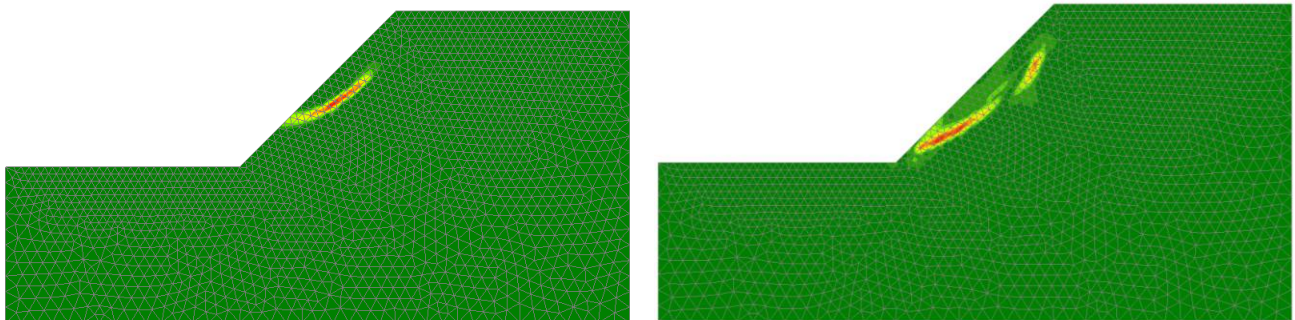


Figure 4 – Mécanismes de rupture donnés par la méthode des contraintes initiales IMET=1 (à gauche) et la méthode sécante IMET=12 (à droite) pour le maillage avec des éléments de 1 m

## **6. Conclusion et perspectives**

Cette communication présente l'utilisation d'accélérateurs de convergence pour les calculs de c-phi réduction. Plus précisément, on utilise la méthode dite « sécante » (Mestat, 1993). Les exemples présentés montrent que la méthode présente plusieurs avantages : en premier lieu, le temps de calcul est divisé par un facteur 2 à 3 ; ensuite, la sensibilité des résultats aux paramètres du processus de calcul élastoplastique est nettement réduite ; enfin, les facteurs de sécurité calculés dépendent moins de la taille des éléments du maillage, en particulier dans le cas de calculs avec de forts angles de frottement et une loi d'écoulement non associée.

D'autres améliorations peuvent être envisagées pour CESAR : en particulier, chaque processus élastoplastique repart du même état de contraintes initial. Cela permet d'interpréter simplement le résultat de chaque étape de calcul, mais ce n'est pas forcément le choix le plus efficace au plan numérique. D'autre part, les calculs de c-phi réduction utilisent une procédure de détection précoce de la non-convergence du processus élastoplastique, que l'on pourrait chercher à améliorer.

## **7. Références**

- Bourgeois E. (2006) Procédures automatiques de calcul de charges limites et de facteurs de sécurité par éléments finis, ELU-ULS 2006, 233-240.
- Crisfield M.A. (1991) Non-linear finite element analysis of solids and structures, Volume 1: Essentials, John Wiley and Sons.
- DIANA (2020) DIANA Finite element analysis – DIANA Documentation Release 10.4
- Itasca (2023) Strength Reduction Procedure in FLAC3D and 3DEC.
- Krabbenhoft K, Lyamin A, Krabbenhoft J (2016) Optum G2: Theory.
- Krabbenhoft K (2023) Computational limit analysis and extensions, Revue Française de Géotechnique, numéro spécial « Charles-Augustin COULOMB : Un hommage géotechnique ».
- Magnan JP et Meyer G (2018). Domaines d'application de la réduction de c et phi dans les études géotechniques. JNGG 2018, Marne la Vallée.
- Mestat P (1993) Lois de comportement des géomatériaux et modélisation par la méthode des éléments finis, Etudes et Recherches des Laboratoires des Ponts et Chaussées, série géotechnique, GT52, 194 p.
- Midas (2020) Midas FEA NX Analysis reference.
- Plaxis (2023) Plaxis Reference Manual 2D.
- Remaud D, Bourgeois E, Avila D (2022) Validation des calculs de stabilité des ouvrages géotechniques par la méthode des éléments finis, JNGG 2022, Lyon.
- Tschuchnigg F, Schweiger HF and Sloan SW (2015) Slope stability analysis by means of finite element limit analysis and finite element strength reduction techniques. Part I: Numerical studies considering non-associated plasticity, Computers and Geotechnics 70, 169–177.
- Zsoil (2022) ZSOIL.PC 2023 User Manual – Theory – Soil, Rock and Structural Mechanics in dry or partially saturated media.