

DETERMINATION DE LA FORMULATION MATHÉMATIQUE DE LA COURBE GRANULOMÉTRIQUE D'UN SOL

A MATHEMATICAL APPROACH TO FORMULATE THE GRADING CURVE OF A SOIL

Jean Claude GRESS¹, Matthias FERREIRA², Guillaume SCHOUMACKER³,

¹ ACE Géotechnique, Fontaines, France

² Hydrogéotechnique, Rouen, France

³ Hydrogéotechnique, Paris Sud, France

RÉSUMÉ – Depuis la théorisation des sciences du sol, aucune avancée significative n'a été faite dans la formulation mathématique d'une courbe granulométrique. De nombreux chercheurs ont essayé, travaillant sur la perméabilité, la conductivité électrique ou thermique, le comportement désaturé, l'optimum de compacité ou la surface spécifique. Est présentée ici une approche considérant une structure log-normale multimodale de la granulométrie.

ABSTRACT – No significant theoretical advances have yet been made in the theory of soil sciences to mathematically describe the grading curves of soils. Numerous researchers have tried, when working on permeability, electrical or thermal conductivity, unsaturated behaviour, optimum compaction or specific surface area. This paper proposes to this end a new multimodal log-normal approach.

1. Introduction

Pour la compréhension d'un certain nombre de comportements géotechniques, les chercheurs ont travaillé sur la possibilité d'attacher à la courbe granulométrique d'un sol, sa formulation mathématique, sans que les approches à ce jour aient permis une modélisation pertinente. Le travail le plus intéressant fût celui de PIERI et al (2006), repris dans BITELLI et al (2015). PIERI a montré que souvent, mais pas toujours sur les exemples pris, certaines courbes granulométriques pouvaient être modélisées comme la somme de deux familles log-normales. Reprenant les exemples pour lesquels cela n'avait pas fonctionné, nous avons recherché s'il n'était pas possible de considérer que les familles log-normales étaient en fait plus nombreuses que deux, ce qui s'est révélé être le cas. Puis nous avons étendu ce travail à d'autres sols dont nous disposons des courbes granulométriques, constatant que cette approche pouvait être généralisée.

2. Phase analytique

Les résultats d'une analyse granulométrique sont synthétisés par sa courbe granulométrique, comme représentée classiquement figure 1. En ordonnée sont figurés les pourcentages pondéraux de la fraction granulométrique passant au travers des mailles du tamis de diamètre d en micromètres indiqué en abscisse par son logarithme décimal. La plage des diamètres varie de 0,001 micromètre ($\log d = -3$) à 100 000 μm ($\log d = 5$). L'axe des abscisses est découpé en segments $[\log x_i ; \log x_{i+1}]$ tels que $\log x_{i+1} - \log x_i$ soit égal à 0,2

Le tableau 1 sous la courbe cumulative présente sur sa première ligne, les valeurs de $\log\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)$ et sur la deuxième les valeurs de $y_m = \left(\frac{y_i+y_{i+1}}{2}\right)$, les valeurs des y_i étant les pourcentages pondéraux correspondant aux x_i et enfin, sur la troisième, la variation de colonne à colonne des y_m . Cette dernière permet de construire les histogrammes à bâtons de la figure 2, faisant apparaître trois familles log-normales, dont on peut estimer pour chacune d'elles son poids en pourcentage par rapport à la fraction totale. La famille 2 apparaît au centre sous sa forme inversée, en partie haute de la figure 2. Les résultats des figures 1 et 2 correspondent à un loam limoneux de Palouse, région située près de Washington, aux Etats-Unis.

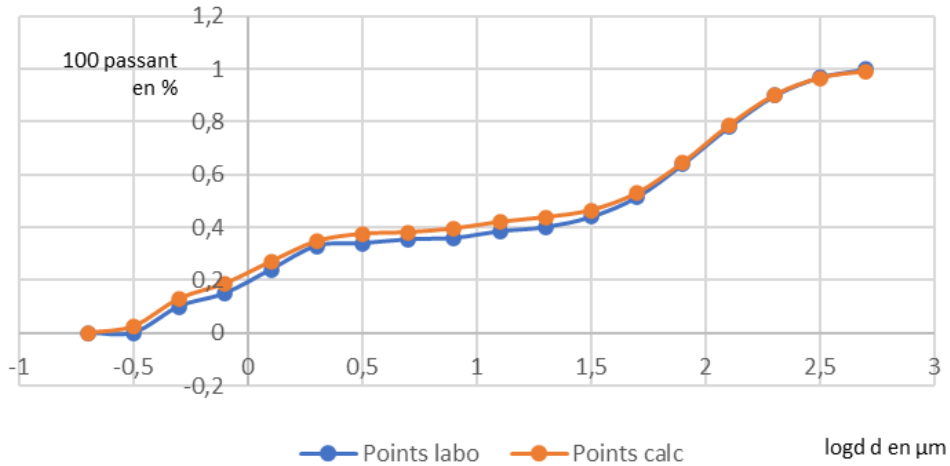


Figure 1. Courbe granulométrique de laboratoire d'un loam de Palouse comparée à celle issue de la formulation théorique proposée.

Tableau 1. Analyse de la distribution bimodale log-normale

$\log\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$		-0,89	-0,69	-0,49	-0,29	-0,09	0,11	0,31	0,51	0,71	0,91	1,11	1,31	1,51	1,71	1,91	2,11	2,31	2,51	2,71	
$\left(\frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right)$	0	0	0,005	0,015	0,0322	0,0665	0,0999	0,139	0,194	0,261	0,339	0,405	0,484	0,626	0,781	0,899	0,916	0,988	0,995		
$\text{VAR}\left(\frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right)$	0	0	0,005	0,01	0,0172	0,0343	0,0334	0,0391	0,055	0,067	0,078	0,066	0,079	0,142	0,155	0,118	0,017	0,072	0,007		

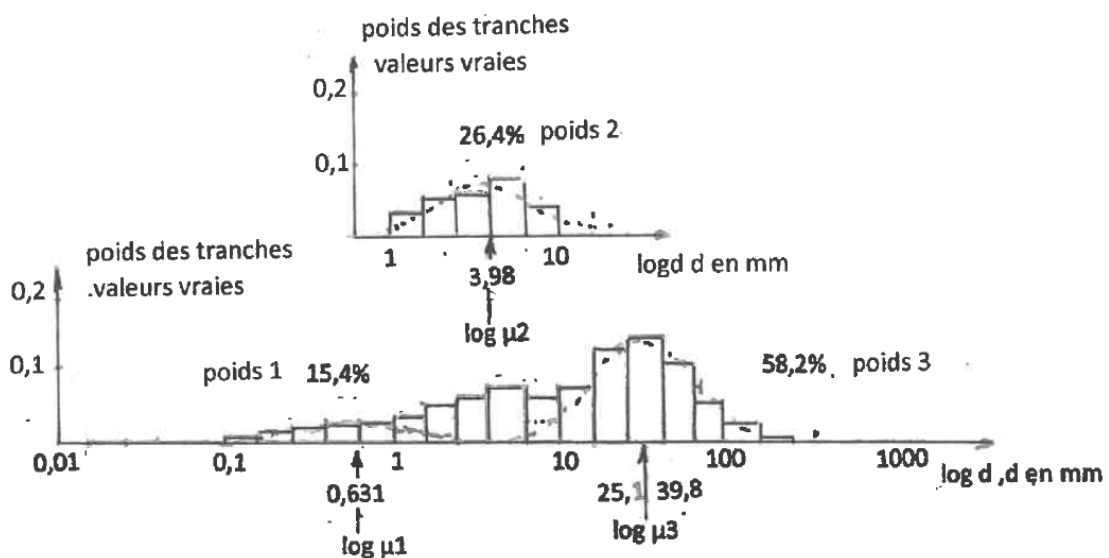


Figure 2. Mise en évidence des trois familles.

3. Phase synthétique

Nous cherchons ici la formulation log-normale de chacune des trois familles mises en évidence par l'analyse de la courbe granulométrique d'un loam de Palouse. Sont analysées successivement les familles 1, puis 2, enfin 3.

Concernant la famille 1, nous cherchons d'abord ses paramètres significatifs, soit $\log \mu_1$ où μ_1 est la valeur moyenne des valeurs de d de la famille 1, puis le poids de la famille $(\text{poids})_1$, et le logarithme décimal de l'écart type $\log \sigma_1$.

μ_1 est l'abscisse en valeur de d du pic de la famille 1, soit ici 0,631mm, d'où $\log \mu_1 = -0,2$. Le poids est la somme des y_m , soit ici 15,4 % ; nous pourrions être amenés à rechercher la valeur la plus juste, par tâtonnements, sachant que le début de cette famille peut être tronqué. Enfin, $\log \sigma_1$ est déterminé par la relation: $\log \sigma_1 = 0,2 \frac{\text{poids}_1}{n_1 (2\pi)^{0,5}}$ où n_1 est la valeur de pic des y_m et 0,2 la valeur de $\log x_{i+1} - \log x_i$.

Ici, $\log \sigma_1 = 0,361$ et $n_1 = 0,034$.

Ayant mis en cohérence les valeurs caractéristiques, éventuellement par tâtonnements, nous calculons pour chaque x_m , la valeur de y_m donnée par :

$$y_{m1} = \frac{0,2 (\text{poids})_1 e^{-0,5 \left(\frac{\log x_m - \log \mu_1}{\log \sigma_1} \right)^2}}{(2\pi)^{0,5} \log \sigma_1} \quad (1)$$

Par exemple Famille 1 : $(\text{poids})_1 = 15,4\%$ $\log \mu_1 = -0,20$ $\log \sigma_1 = 0,361$

Tableau 2. Valeurs des y_m calculées.

log xm1		-0,89	-0,69	-0,49	-0,29	-0,09	0,11	0,33
ym1	0	0,0055	0,0135	0,0246	0,033	0,0295	0,0235	0,0125

Nous pouvons alors vérifier les limites de la famille 1 en abscisse par le calcul de $\log \mu - 2 \log \sigma$ et $\log \mu + 2 \log \sigma$, donnant des diamètres de 0,12 mm et 3,33 mm.

Pour les trois familles, nous obtenons :

Tableau 3. Valeurs caractéristiques des trois familles.

Famille	μ_i	$\log \mu_i$	$(\text{poids})_i$	n_i	$\log \sigma_i$	$10^{(\log \mu - 2 \log \sigma)}$	$10^{(\log \mu + 2 \log \sigma)}$
1	0,631mm	-0,2	15,40%	0,034	0,361	0,120 mm	3,33 mm
2	3,98 mm	0,6	26,40%	0,07	0,3	1mm	15,85 mm
3	32,45 mm	1,51	58,20%	0,155	0,2966	8,12mm	129 mm

Il est alors possible de calculer les y_m et, en les sommant, de trouver la courbe granulométrique calculée et tracée sur la figure 1.

Tableau 4. Déroulé des calculs de reconstitution de la courbe granulométrique

x_i	0,1	0,1585	0,25	0,398	0,631	1	1,585	2,51	3,98	6,31	10	15,85	25,1	39,8	63,1	100
x_{i+1}	0,1585	0,251	0,40	0,631	1	1,585	2,51	3,98	6,31	10	15,85	25,1	39,8	63,1	100	158,5
$\log((x_i + x_{i+1})/2)$	-0,89	-0,69	-0,49	-0,29	-0,09	0,11	0,31	0,51	0,71	0,91	1,11	1,31	1,51	1,71	1,91	2,11
y_{m1}	0,0055	0,0135	0,02	0,033	0,0295	0,0235	0,0125	0,0049	0,0014							
y_{m2}						0,0185	0,044	0,067	0,065	0,041	0,0165	0,0043				
y_{m3}										0,021	0,064	0,124	0,155	0,124	0,0637	0,021
Somme lignes y_m	0,0055	0,0135	0,02	0,033	0,0295	0,042	0,0565	0,0719	0,0664	0,062	0,0805	0,1283	0,155	0,124	0,0637	0,021
Somme colonnes	0,0055	0,019	0,04	0,0766	0,106	0,148	0,205	0,276	0,343	0,405	0,485	0,614	0,769	0,893	0,956	0,977

Où les y_{mi} sont donnés par :
$$y_{mi} = \frac{0.2 (poids)_i e^{-0.5(\frac{\log x_m - \log \mu_i}{\log \sigma_i})^2}}{(2\pi)^{0.5} \log \sigma_i} \quad (2)$$

Sur certains exemples, il a fallu opter pour cinq familles, comme présenté ci-après. Il peut arriver que les histogrammes soient tronqués aux extrémités.

4. Application au fuseau granulométrique de graves du TGV Méditerranée

Pour prendre un autre exemple et montrer la pertinence de l'approche, nous prenons ici l'exemple de l'étude d'un emprunt de graves pour couches de forme pour le projet de ligne TGV, dite méditerranée. Le prélèvement de 44 échantillons a permis de construire le fuseau granulométrique présenté sur la figure 3. Les figures 4 et 6 montrent qu'il faut dans les deux cas, courbe haute et courbe basse, envisager et traiter cinq ou quatre familles.

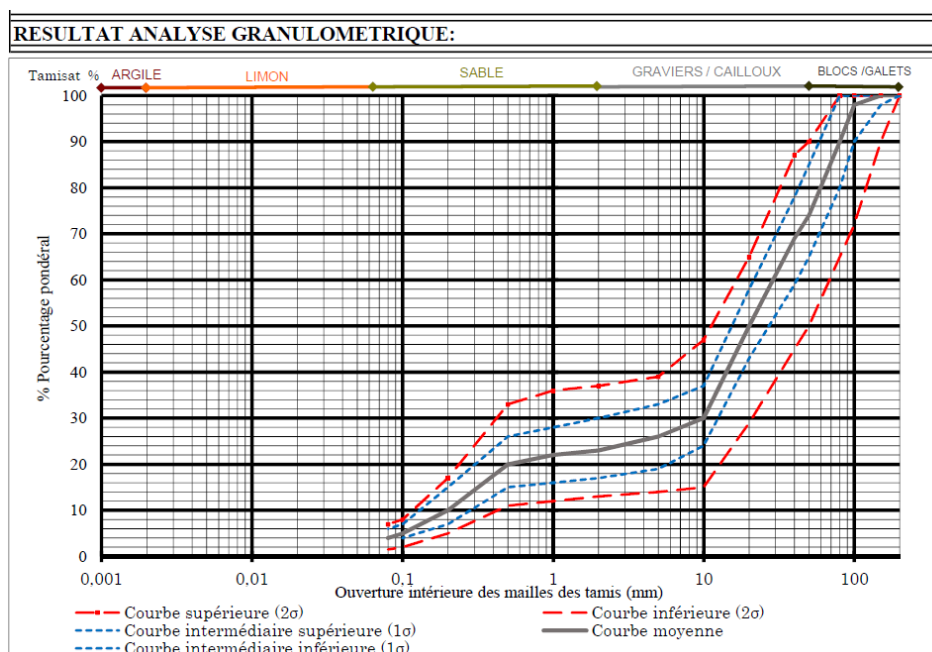


Figure 3. Fuseau granulométrique de graves d'emprunt du TGV Méditerranée.

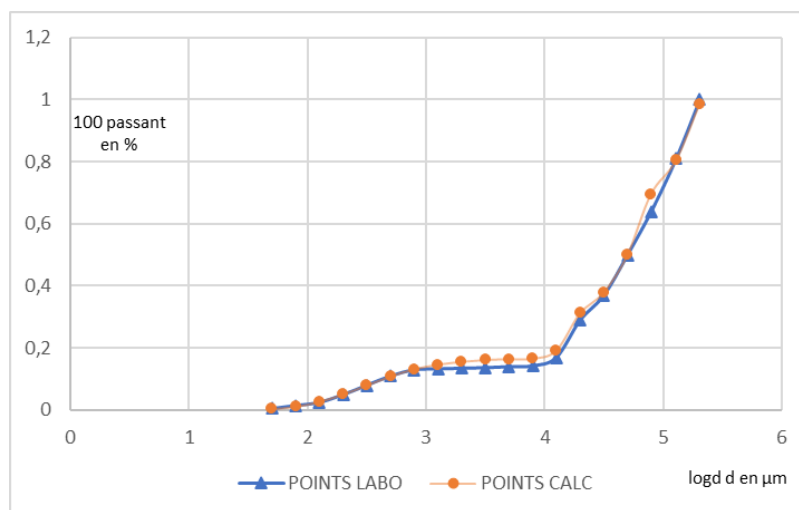


Figure 4. Courbe inférieure. Courbe labo et calculée par un modèle penta-modal.

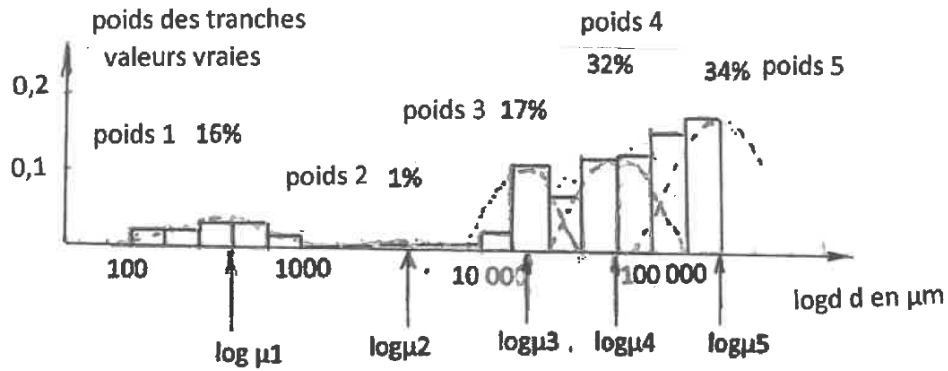


Figure 5. Courbe inférieure. Décomposition en cinq familles.

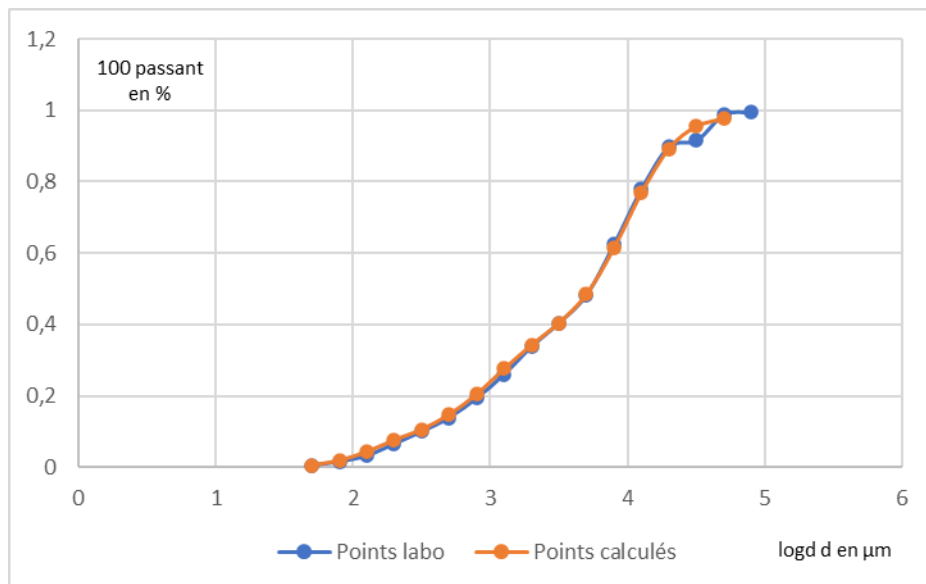


Figure 6. Courbe supérieure.

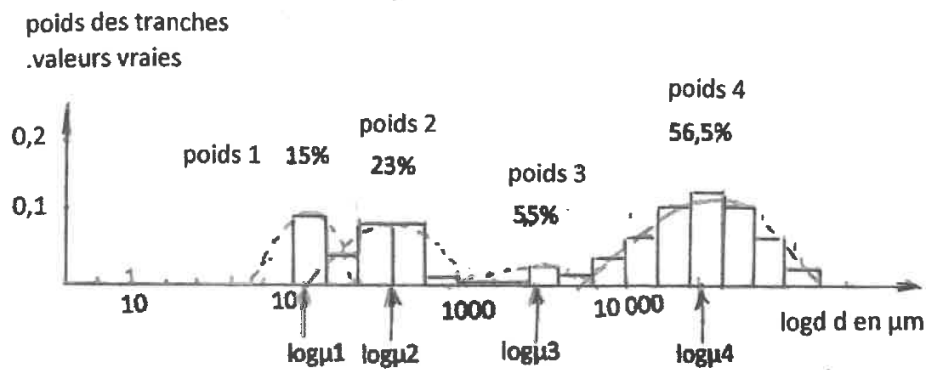


Figure 7. Décomposition de la courbe supérieure en quatre familles.

Le tableau 5 résume les paramètres caractéristiques des quatre et cinq familles, pour chacune des courbes.

Tableau 5. Paramètres caractéristiques des cinq et quatre familles pour les deux courbes

Courbe	Famille	μ_i	$\log \mu_i$	(poids) $_i$	n_i	$\log \sigma_i$	$10^{(\log \mu_i - 2 \log \sigma_i)}$	$10^{(\log \mu_i + 2 \log \sigma_i)}$
inférieure	1	398 μm	2,6	16%	0,03	0,425	56 μm	2818 μm
	2	3980 μm	3,6	1%	0,003	0,266	1169 μm	13551 μm
	3	20475 μm	4,31	17%	0,12	0,113	11857 μm	33573 μm
	4	63100 μm	4,8	32%	0,135	0,189	26424 μm	150660 μm
	5	251000 μm	5,4	68%	0,19	0,285	67608 μm	500431 μm Tronqué
supérieure	1	129,25 μm	2,11	15%	0,099	0,12	74,1 μm	223,9 μm
	2	398 μm	2,6	23%	0,089	0,204	155,6 μm	1018 μm
	3	1454 μm	3,5	5,50%	0,023	0,175	1412 μm	7079 μm
	4	32450 μm	4,51	56,50%	0,138	0,322	7345 μm	142560 μm

n_i est le n de pic obtenu pour $\log x = \log \mu_i$

$$n_{pic} = \frac{0.2 (poids)_i}{(2\pi)^{0.5} \log \sigma_i} \quad (3)$$

Sur les figures 4 et 6, sont tracées les courbes résultant de l'analyse mathématique. Nous pouvons constater une très bonne concordance, mêmes pour les paliers horizontaux.

5. Conclusions

Les exemples donnés ci-dessus montrent la pertinence de l'approche suggérée pour attacher à une courbe granulométrique de laboratoire, sa formulation mathématique. Il faut considérer des modèles log-normaux multi-modaux, lesquels vont apparaître dans la représentation des courbes en diagrammes à bâtons. Cela demandera un certain nombre de tâtonnements pour trouver la bonne formule. Nous avons testé la pertinence de cette approche sur une trentaines de courbes dont nous disposons. Ayant accès à la formulation mathématique de la courbe (relation 3), y étant la somme des y_{mi} , nous pouvons exploiter cette possibilité pour chercher à mieux comprendre le comportement géotechnique du matériau, comme développé dans notre introduction. En particuliers le travail de Arya et al (1981), amélioré par Gress (2015), permet d'estimer la forme de la courbe d'évolution du potentiel de succion PF avec la teneur en eau et la variation de l'indice des vides fonction du PF. La connaissance de la courbe granulométrique permet aussi l'approche du risque de suffosion éventuellement amorcé par un écoulement par exemple sous un barrage. Enfin, il apparait quand sont testés des mélanges artificiels de sables et de sols fins, que l'échantillon reconstitué aura le comportement géotechnique d'un matériau naturel, que si sa courbe granulométrique est la somme multimodale de fonctions log normales.

6. Références bibliographiques

- Arya L.M., Paris J.F. (1981). A physico-empirical model to predict the soil moisture characteristic from particle size distribution and bulk density data. Soil Science Society of America Journal, pp45-1023-1030. Bitelli M, Campbell G.S., Fausto T. (2015). Soil physics with python. Oxford university press.
- Gress J.C., (2015) Intérêt de la méthode d'Arya-Paris modifiée pour l'évaluation du retrait des sols. Symposium international SEC 2015.
- Pieri L., Bitelli M., Rossi Pisa P. (2006). Laser diffraction, transmission electron microscopy and image analysis to evaluate a bimodal gaussian model for particle size distribution in soils. Science direct. Geoderma, pp.135, 118-132.